此卷只装订不密封

姓名________ 准考证号 考场号 座位号

绝密 ★ 启用前

累加法和累乘法求数列通项

数学

本试卷共 4 页，22 题．全卷满分 150 分, 考试用时 120 分钟．

注意事项：

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．
2. 回答选择题时, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 写在本试卷上无效．
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回．

一、 单选题：本题共 2 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=a_n-\frac{1}{3}a_n^2\,(n\in\mathbf{N}^*)$，则（　　）

A. $2<100a_{100}<\frac{5}{2}$　　B. $\frac{5}{2}<100a_{100}<3$　　C. $3<100a_{100}<\frac{7}{2}$　　D. $\frac{7}{2}<100a_{100}<4$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\,(n\in \mathrm{N}^*)$．记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则（　　）

A. $\frac{3}{2}<S_{100}<3$　　B. $3<S_{100}<4$　　C. $4<S_{100}<\frac{9}{2}$　　D. $\frac{9}{2}<S_{100}<5$

二、解答题：本题共 9 小题，每小题 5 分, 请考生在 22、23 题中选择一题，并在答题纸上涂黑，不涂黑、多涂或多答均按第一题评分．

3. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2, a_{n+1}=a_n+n+1$ （1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；（2）设 $b_n=\frac{1}{a_n}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明 $T_n<2$．

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_n=3^{n-1}+a_{n-1}\,(n\in \mathrm{N}^*, n\geqslant 2)$．(1) 求 a_2, a_3；(2) 证明: $a_n=\frac{3^n-1}{2}$．

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}=2^n, a_1=1, a_2=3$．（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；（2）求 $\left\{(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{2^{n+1}+2^n-2}{a_{n+1}a_n}\right)\right\}$ 的前 n 项和 T_n．

6. 已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}, a_1=1, a_{n+1}=-a_n+4\times 3^{n-1}, b_n=\log_3 a_{n+2}{}^{a_{n+2}}\,(n\in\mathbf{N}^*)$．（1）求证：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；（2）求数列 $\left\{\left(2+\frac{3}{n}\right)\cdot\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n．

7. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1, \left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列．（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；（2）证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$．